DAV

Kurze Einführung in die stochastische Modellierung von Sterblichkeitsprognosen

Dr. Stephen Richards

24 November 2016

Overview

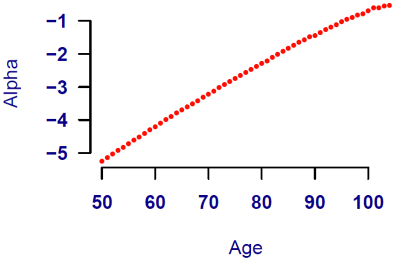
1. Lee-Carter-Modell
2. APC-Modell
3. CBD-Modell
4. 2DAP-Modell
5. Parameterschätzung
6. Zusammenfassung

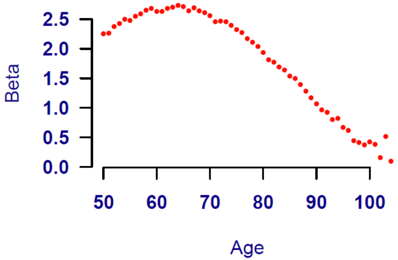
1 Lee-Carter-Modell

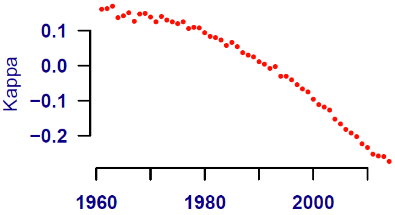
1 Lee-Carter-Modell

- Lee and Carter (1992).
- $\log \mu_{x,y} = \alpha_x + \beta_x \kappa_y$
- α_x beschreibt die altersbezogene Sterblichkeit.
- κ_y ist der Periodeneffekt.
- β_x ist die altersbezogene Reaktion auf den Periodeneffekt.
- Die Sterblichkeitsprognose erfolgt durch die Prognose von κ_y, am besten als ARIMA-Prozess.

1 Lee-Carter-Modell





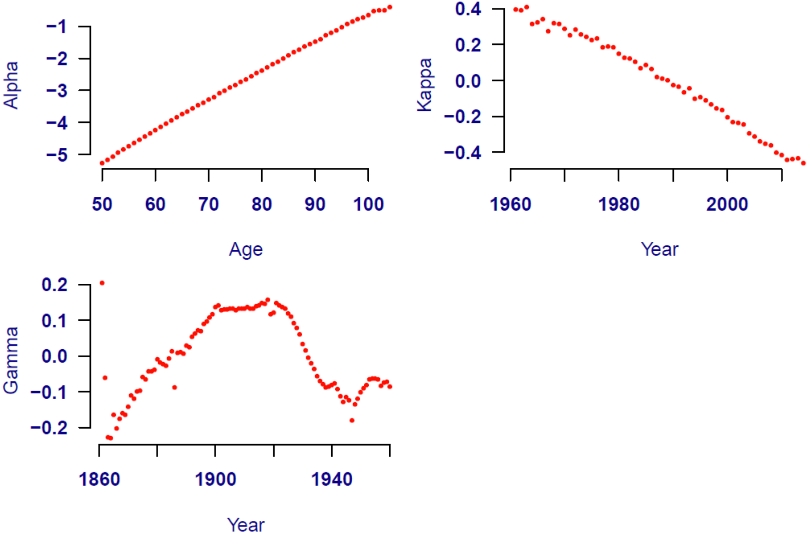


2 APC-Modell

2 APC : Alter-Periode-Kohort

- $\log \mu_{x,y} = \alpha_x + \kappa_y + \gamma_{y-x}$
- α_x beschreibt die altersbezogene Sterblichkeit.
- κ_y ist der Periodeneffekt.
- γ_{y-x} ist der Kohorteffekt, d.h. jahrgangsbezogene Sterblichkeit.
- Die Sterblichkeitsprognose erfolgt durch die unabhängigen Prognosen von κ_y und γ_{y-x}, beide am besten als jeweilige ARIMA-Prozesse.

2 APC : Alter-Periode-Kohort

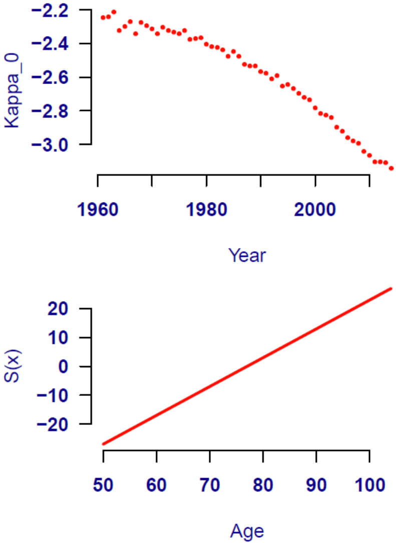


3 CBD-Modell

3 CBD: Cairns-Blake-Dowd

- Cairns et al. (2006).
- $\log \mu_{x,y} = \kappa_{0,y} + \kappa_{1,y}(x - \bar{x})$
- $\kappa_{0,y}$ und $\kappa_{1,y}$ stellen zusammen eine Gompertzsterblichkeit im Jahr y dar.
- Die Sterblichkeitsprognose erfolgt durch die gemeinsame Prognose von $\kappa_{0,y}$ und $\kappa_{1,y}$ als "bivariate random walk".

3 CBD: Cairns-Blake-Dowd



4 2DAP: 2D P-splines

- Currie et al. (2004).
- $\log \mu_{x,y} = \sum_i \sum_j \theta_{i,j} B_i(x) B_j(y)$
- $B_i(x)$ ist die "basis spline"-Funktion i für Alter x.
- $B_j(y)$ ist die "basis spline"-Funktion j für Jahr y.
- $\theta_{i,j}$ ist ein Pseudoparameter, der keine direkte Interpretation hat.
- Die Sterblichkeitsprognose erfolgt durch die Glättungsfunktion ("penalty function") für $\theta_{i,j}$.

5 Parameterschätzung

5 Parameterschätzung

- Parameterschätzung erfolgt mittels der “maximum likelihood”-Methode.
- Nach Brouhns et al. (2002) nehmen wir an, dass die Anzahl der Sterbefälle eine Poissonverteilung hat.
- $D_{x,y} \sim \text{Poisson}(\mu_{x,y} E^c_{x,y})$
- $D_{x,y}$ ist die Anzahl von Sterbefällen zum Alter x im Jahr y.
- $E^c_{x,y}$ ist die durchschnittliche Größe der Bevölkerung zum Alter x im Jahr y.

5 Parameterschätzung

- Die Lee-Carter- und APC-Modelle brauchen zusätzliche Nebenbedingungen ("identifiability constraints"), um Schätzungen für die Parameter zu finden.
- Die CBD- und 2DAP-Modelle brauchen keine Nebenbedingungen.

6 Zusammenfassung

6 Zusammenfassung

- Stochastische Modelle sind stark unterschiedlich.
- Prognosen erfolgen nach ganz unterschiedlichen Methoden.
- Die Modelle ergeben dadurch unterschiedliche Prognosen.

References I

Brouhns, N., M. Denuit, and J. K. Vermunt (2002). A Poisson log-bilinear approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics 31(3)*, 373–393.

Cairns, A. J. G., D. Blake, and K. Dowd (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance 73*, 687–718.

Currie, I. D., M. Durban, and P. H. Eilers (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical Modelling 4*, 279–298.

References II

Lee, R. D. and L. Carter (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association 87*, 659–671.